**Espacios vectoriales**

**Definición**

* Sea K un cuerpo[[1]](#footnote-0) y V un conjunto no vacío, diremos que V es un **espacio vectorial** sobre K si:
  + En V hay definida una **operación interna** de forma que (V,+) es un grupo abeliano: Verifica las propiedades asociativas,conmutativas, existencia de elemento gfneutro y elemento opuesto.
  + En V hay definida una **operación externa** de K en V, que denotaremos por yuxtaposición, verificando:
    - a(u+v) = au+av, ∀a∈K, ∀u,v∈V,
    - (a+b)u = av+bv, ∀a,b∈K, ∀v∈K,
    - a(bv) = (ab)v, ∀a,b∈K, ∀v∈K,
    - Iu = u, donde I es la unidad para el producto en k.
    - La operación externa recibe el nombre de producto por escalares.
* Los elementos del espacio vectorial suelen denominarse **vectores**, mientras que a los del cuerpo k se les denomina **escalares**.

**Ejemplos**

* **Mmxn(K)** es un espacio vectorial sobre K con las operaciones suma de matrices y producto de matriz por escalar.
* El cuerpo **K** es un espacio vectorial sobre sí mismo, con las operaciones suma de escalares y producto de escalares.
  + Si consideramos el producto de K consigo mismo n veces (Kn), podemos dotarlo de estructura de espacio vectorial sobre K:

(k^n) -> {(x1,x2…,xn)|xi∈K, ∀i∈=1…n}

* El conjunto de polinomios en una indeterminada con coeficientes en el cuerpo K, denotado **P(K)**, constituye un espacio vectorial. Se denomina ‘anillo de polinomios de una variable con coeficientes reales’
  + También lo es el conjunto de polinomios de grado menor o igual que n sobre K, denotado Pn(K) para todo n.
* El conjunto de todas las funciones en un intervalo de la recta real es un espacio vectorial real.
* Existe un espacio vectorial cero **{0}** con un único vector, neutro para la suma. Cumple que 0+0=0 y k0=0 para todo k.
* **Rn** es el espacio vectorial de vectores de n números reales. Rn := { (x1, … xn)/ xi ∈ R}
  + (x1,...xn) + (y1,...,yn) = (x1+y1,...,xn+yn)

**Propiedades** e demostración

* Sendo V un K-espacio vectorial., e a,b∊K e v∊V.

1. **av = 0 ←→ a=0 ou v=0**
   * (**→)** Se av=0, con a=/=0, v = (a-1a)v = a-1\*(av) = a-1\*0 = 0. Logo, v=0.
   * Dado que o 0 é o elemento neutro da suma, 0v = (0+0)v = 0v+0v. Entón, concluímos que 0v é tamén un elemento neutro da suma, e 0v=0.
2. **av-bv = (a-b)v**
   * (a-b)v = (a+ (-b))v = av + (-b)v = av-bv
3. **av=bv → a=b se v=/=0**
   * av=bv → av-bv = 0 → a-b=0 (se v=/=0) → a=b
4. **-(av) = (-a)v = a(-v)**
   * av + (-a)v = (a-a)v =0v = 0. Entonces, -(av)=(-a)v
   * av + a(-v) = a(v-v) = a0 = 0. Entonces, (-av) = a(-v)

**Subespacios vectoriales**

* Siendo K,(V,+,\*) y U ⊆V, (U,+,\*) es un **subespacio** en V.
* Entonces, por definición:
  + Para todo u1, u2 ∈ U, u1+u2 ∈ U
  + Para todo n∈K, n\*ui∈U
* Entonces, para todo ni∈K y ui ∈ U, n1\*u1 + … + ni\*ui ∈ U. Cada elemento ni\*ui es conocido como combinación lineal de un elemento de U.
  + La suma de todas las combinaciones lineales de U es U.
* Dados dos subespacios U1 y U2 que son subespacios vectoriales de V:
  + U1 U U2, no es un subespacio vectorial de V (por lo general).
    - Por ejemplo, el subespacio U1 es el eje X y el subespacio U2 es el eje Y. Si sumamos un vector del eje X (5,0) y otro del eje Y (0,5), obtenemos el 5,5 que no pertenece a la unión del eje X y el Y.
    - U U W será un subespacio si y solo si **U C W** o **W C U**, pues en estos casos U U W= W o U U W= U, respectivamente
  + U1 ∩ U2 sí es un subespacio, pues cumple las propiedades:
    - v∈V | v∈U1^v∈U2 | v∈U1∩U2
    - nv1 + mv2 ∈ U1^U2
  + Se define el **subespacio suma** de U y W como U+W:={u+w | u∈U y w∈W}
    - U+W = <U U W>. Es decir, U+W es el menor subespacio de V que contiene a U y W.
    - Si U = <S> y W = <S’>, entonces U+W = <S U S’>
* {0} y V son subespacios de V, se denominan subespacios triviales.
* {(x,y,z) ∈ R3 | x+z=1}

**Combinación lineal, independencia lineal**

* Dado un conjunto de vectores V (v1, … , vn) en un K-espacio vectorial, una **combinación lineal** de estos vectores es cualquier vector (a1\*v1, … , anvn) siendo ai un escalar el cuerpo K.
* Un conjunto será **linealmente dependiente** si el vector 0 se puede escribir como combinación lineal de los vectores sin que todos los escalares sean 0..
* S es **linealmente independiente** si y solo si (<-> ni=0, ∀i = 1, …, n).
  + Es decir, la única forma de obtener el 0 a partir de vectores de S es la ‘forma trivial’, multiplicando los vectores por 0.
  + Para conseguir que un conjunto sea linealmente independiente, se eliminan todos los vectores que son combinación lineal de otro en el conjunto.
  + Para comprobar si es linealmente independiente, se resuelve el sistema asociado y se reduce la matriz a pivotes. Si el rango de la matriz es el máximo, será linealmente independiente. Si se anula una fila, es dependiente.
* Para comprobar si un conjunto de vectores es linealmente dpeendiente o independiente, se asocia una incógnita(escalar) a cada vector, se iguala al (0,0,0,…) y se resuelve el sistema, sin incluír la columna de 0s.
  + Para isto, compróbase se os 2 primeiros vectores son 0, logo os 3 primeiros, e vanse engadindo 1 vector de cada vez, ata chegar a sumar o conxunto enteiro de ser preciso.
* **Observaciones:**
  + Todo conjunto que contenga el vector cero es linealmente dependiente. (se puede multiplicar ese vector por cualquier escalar y los demás vectores por 0).
  + Si S1 ⊂ S2:
    - S1 linealmente dependiente ⇒ S2 linealmente dependiente.
      * Se pueden multiplicar por 0 los vectores de S2 que no estén en S1.
    - S2 linealmente independiente ⇒ S1 linealmente independiente.
  + Un conjunto de vectores es linealmente dependiente si y sólo si uno de los vectores es combinación lineal de los restantes.
    - Lin.dep. si a1v1 + … + anvn = 0 sin que todo ai=0. Asumamos que a1=/=0. Despejamos v1, con a1 pasando a dividir los demás vectores..
    - v1 =
    - Entonces, a1 es una combinación lineal de los restantes vectores.
  + Sea S = {u1, …, us} linealmente independiente.
    - Si u !∊ <S>, S U {u} será linealmente independiente.
    - Además, si S U {u} es linealmente independiente, u !∊ <S>
    - Entonces, para convertir S en una base de V, podemos incluír repetidamente vectores u que cumplan esta característica.

**Sistemas de generadores**

* S es un conjunto de **generadores[[2]](#footnote-1)** de V si mediante las combinaciones lineales de S se puede generar todo el conjunto.
  + Ejemplo: Si V=R2, tomamos dos vectores e1=(0,1) y e2=(1,0)
  + <{e1, e2}> es un conjunto de generadores de R2.
* En un espacio vectorial no nulo, de cualquier sistema de generadores finito se puede extraer una base.
* **Lemas:**

1. Si {u1, u2, … un} es un sistema de generadores de V, se pueden eliminar los vectores que sean combinación lineal de los demás (ui) y seguirá siendo un sistema de generadores.
2. Si un conjunto {v1, v2, … vm} es linealmente independiente y {u1, u2, …, un} es un sistema de generadores de V, entonces m≤n.

**Bases de un espacio vectorial**

* Dado un espacio vectorial V, un subconjunto B es una base de V si:
  + B es linealmente independiente.
  + B es sistema de generadores de V.
* **Lema:** Siendo S el conjunto de los vectores S={v1, … vn}, <s> = V. Si existe un vr es combinación de los restantes (r=/=0), entonces S\vr  es también un sistema de generadores de V.[[3]](#footnote-2)
* Siendo B={u1, … um} una base de V, los escalares tales que

v=)B son las **coordenadas** de v respecto de B.

* **Base canónica** de K^n: el conjunto ***C***={ (1,0,0…,0), (0,1,0,...0), …, (0,0,0…, 1)}
  + Representa una matriz diagonal que representa un sistema compatible.
* **Teorema de existencia de base:** Sea V un espacio vectorial con un conjunto finito de generadores S. Entonces, existe un subconjunto de S que es una base de V.
* Siendo B una base de V con n elementos. Se cumple que todo subconjunto de V con más de n elementos será linealmente dependiente.
* Si V tiene dimensión n, cualquier subconjunto de V con n vectores lin. indep. es una base de V.

**Teorema de ampliación de la base**

* Sea V un espacio vectorial sobre K, de dimensión n, y sea {u1, u2, …, us } = un subconjunto de V de s vectores linealmente independientes.
* Entonces, s<=n, y existen vectores {vs+1, …, vn} que cumplen que {u1, u2, …, us, vs+1, …, vn} es una base de V.
* Es decir, todo subconjunto de V lin. indep. se puede ampliar a una base de V.
  + Demostración: si s>n, no sería linealmente independiente.
  + Si s=n, el conjunto ya sería una base de V.
  + Si s<n, <u1, …, us> C <v1, …, vn>. entonces, existirá al menos un vector vi que no pertenezca a <u1, …, us>, por lo que {u1, u2, …, us, vi} será lin. indep.
  + Repetimos esto añadiendo n-s vectores vi hasta que el conjunto sea generador de V, y por lo tanto base de V.
* En un ejercicio, si se pide ampliar un conjunto a una base de R^n, es necesario considerar los vectores escalonados (0,0,1,0) que le faltan al conjunto para poder tener n vectores escalonados linealmente independientes.
  + Por ejemplo, siendo S={(1,1,1,1,),(1,2,3,4)}. Sería necesario añadir además el (0,0,1,0) y el (0,0,0,1).
* **Corolario:** Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Dado un conjunto S de exactamente n vectores, son equivalentes[[4]](#footnote-3) las siguientes afirmaciones:
  + S es linealmente independiente
  + S es sistema de generadores de V
  + S es una base de V.

**Teorema del intercambio de Steinitz**

* Explicación de Merino-Santos, solo o 1º postulado do teorema, o único que explicou barja na clase. explicación expandida do teorema en [3\* notas](https://docs.google.com/document/u/0/d/1Yj4SHw2UCgc8mz5IEGEAJmIwbhCC89tBPjxCNuzgZo4/edit).
* Sea L={u1,...um} conjunto de vectores linealmente independientes. (libres.)
* Sea S={w1,...wn} conjunto generador de V, tal que <S>=V.
  + Tanto L como S son subconjuntos de V.
* Entonces, **m<=n**. Demostración:
  + Todo vi es combinación lineal de algún vector de <S>, ya que pertenece al espacio V.
    - 0 =/= v1 =
  + Además, el vector vi de L no puede ser (0,0,0,0) ya que no sería linealmente independiente. Esto también significa que no pueden ser todos los escalares de la combinación lineal 0.
  + Entonces, existe un escalar xi distinto de 0 que pertenece a K. Suponemos sin perder generalidazd que este escalar es x1 y multiplica al primer vector u1.
    - S1 = {v1, u2, … un}. Sustituyendo el primer vector de S por el primero de L. Se cumple aún que <S1> = <S> = V ?
      * v1 = x1\*u1 + … + xn\*un
      * x1\*u1 = v1 - x2u2 - … - xun
      * u1 = -- … -
    - Concluímos que todo vector de S se puede reemplazar por una combinación lineal de los demás y un vector de L.
  + Repetimos este proceso tomando todos los vectores de L: v2 toma la posición de u2 en S1.
    - v2 = y1v1 + y2u2 + … ynun . Entonces, de nuevo, algún escalar debe ser distinto de 0. Asumimos que es y2.
    - S2 = {v1, v2, u3, …, un}. <S2> = <S1> = <S>
  + Conocemos que en L no hay vectores combinacion lineales entre ellos ya que no sería lin.indep.
  + Además, todo ui tiene su equivalente que puede ser sustituído en S.
    - De lo contrario, eventualmente nos quedaría un Sn donde todos los vectores son parte de L = {v1, …, vn} y existiría un hipotético vn+1 que es combinación lineal de estos.
    - Sin embargo, ningún vector de L puede ser combinación lineal de vectores de L ya que es indep. lineal.
  + Concluímos entonces que S no puede tener menos elementos que L. Es decir, **m<=n.**
* **Teorema de la base:** Corolario del teorema de Steinitz. Si un espacio vectorial V tiene una base formada por un número finito de vectores, todas las bases de V tienen el mismo número de vectores.
  + Se explica aplicando el teorema de Steinitz bidireccionalmente entre dos conjuntos de generadores.

**Dimensión de un espacio vectorial**

* De un espacio vectorial V que posee una base finita, diremos que es un espacio vectorial de dimensión finita y llamaremos **dimensión** al número de vectores en cualquiera de sus bases. Expresado con **dim(V)**
* dim(V) será el máximo número de vectores independientes en V, y también es el mínimo número posible de vectores generadores de V.
* Ejemplos:
  + dimK(K^n) = n. Se puede comprobar a partir de la base canónica.
  + Siendo Pn(K) el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n, {1,x,x^2,...x^n} es la base estándar de Pn(K). Entonces, dim(Pn(K)) = n+1.
* Se verifica que, siendo U un subespacio de v:
  + dim(U) <= dim(V)
    - Si U es un subespacio de V, todo subconjunto de U que sea linealmente independiente tendrá como máximo n vectores, donde dim(V)=n.
  + dim(U) = dim(V) ↔ U=V
    - Si dim(U)=dim(V)=n, entonces U tiene una base de n elementos. Además, todo subconjunto de V linealmente independiente con n elementos será una base de V.
    - Entonces, U=V, y la base mencionada de U será también base de V.

**Coordenadas de un vector respecto de una base**

* Sea V un espacio vectorial sobre K. Si B={u1, u2, …, un} es una base de V, todo vector x∊V se escribe de forma única como combinación lineal de los vectores de V.
* Los escalares necesarios para que x1\*u1 + … + xn\*un = v, donde v es un vector de V, sereán las **coordenadas** de v respecto de la base B, representadas con:
  + x = (x1,x2, …, xn)B

**Fórmula de Grassman**

* Sean V un espacio victorial de dimensión finita n y U,W subespacios de V. Entonces:
  + **dim (U) + dim(W) = dim(U+W) + dim(U⋂W)**
* Demostración**:**
  + Sean Bu={u1, …, us} una base de U y BW)={w1, …, wr} una base de W.
  + Si BU⋂W = {v1, …, vt} es una base de U⋂W, es necesario que t<= mín{r,s}.
  + Además, BU⋂W es un subconjunto linealmente independiente tanto de U como de W.
    - Entonces, existen s-t elementos de U tales que B1={v1, …, vt, ui1, …, ui s-t} es una base de U.
    - También existen r-t elementos de W tales que B2={v1, …, vt, wi1, …, wi r-t} es una base de W.
  + U+W = <U U W> = <{v1, …, vt, ui1, …, ui s-t, wi1, …, wi r-t} >
  + Entonces, el conjunto {v1, …, vt, ui1, …, ui s-t, wi1, …, wi r-t} si es linealmente independiente será una base de U+W.
  + En conclusión:
    - dim(U) = s, dim(W) = r
    - dim(U**⋂**W) = t
    - dim(U+W) = t + (s-t) + (r-t)
    - Se cumple, entonces, el teorema: s+r = t + (s-t) + (r-t) + t.

**Cierre**

* **Cierre** de un vector **<s>**: Subespacio de las combinaciones lineales de ni\*vi, donde ni∈K y vi∈S. También conocido como ‘subespacio generado por S’.
  + S = {u1, …, us)
  + < S > = { ni\*vi | ni∈K, vi ∈ S }
  + (es decir, el cierre de un vector S es el subespacio de todos los vectores que se pueden formar a partir de combinaciones lineales de S).
  + Puede existir también el cierre de varios vectores. Ejemplo:

<(0,0,1,2)> = U = {(A,B,C,D)| A=0, B=0, C=C, D=2L}

**Propiedades del cierre**

* Sean dos conjuntos de vectores S, S’, <S>=<S’> si y solo si:
  + <S> ⊆ <S’> y <S’> ⊆ <S>
  + Entonces, S ⊆ <S’> y S’ ⊆ <S>
* <0> = {0}, por convenio.
* El cierre de un conjunto **no** varía si:
  + Si se realiza una permutación entre dos vectores.
  + Si se multiplica un vector de un conjunto por un escalar distinto de 0.
  + Si se suma a un vector otro vector del mismo conjunto multiplicado por un escalar.
  + Se realiza la unión del conjunto con un vector que pertenece al conjunto.
* Siendo U1 y U2 subespacios de V,

U1 = <S1>, U2 = <S2> —> U1+U2 = <U1 U U2> = <S1 U S2>

**Rango de una matriz**

* El espacio vectorial determinado por las filas de una matriz tiene la misma dimensión que el espacio vectorial definido por sus columnas. Demostración:
  + Si A ∈ Mm×n(K) se tiene que <F1(A), . . . , Fm(A)> es un subespacio de Kn y <C1(A), . . . , Cn(A)> es un subespacio de Mm×1(K).
  + Si dos matrices son equivalentes por filas, el cierre de los vectores de sus filas son iguales. <F1(A), . . . , Fm(A)> = <F1(B), . . . , Fm(B)>
  + rf (A) = dim(<F1(A), . . . , Fm(A)>). Esto es debido al punto previo: toda matriz es equivalente por filas a otra escalonada, y el número de pivotes de esta matriz será igual a la dimensión de su cierre de filas.
    - Entonces, si A y B son equivalentes por filas, rf(A) = rf(B)
  + Definimos rc(A) como el rango por columnas de A. Conocemos que rc(A) = rc(B) si A y B son equivalentes por columnas.
  + Demostración de que rc(A) = rf(A)
    - Siendo A una matriz de dimensión mxn, con rango por columnas r.
    - Sea [c1, …, cr] una base para el espacio columna de A.
    - Sean estas columnas [c1, …, cr] las columnas de una matriz Cmxr
    - Al ser las columnas de C una base de A, cada columna de A se puede expresar como una combinación lineal de las r columnas de C.
    - Sea Rrxn la matriz cuyas n columnas de r elementos son los coeficientes que, al multiplicarse por [c1, …, cr], dan la correspondiente columna de A. Se cumple que A = C\*R
    - Se cumple también que cada fila de A es una C.L. de las filas de R.
    - Entonces, las filas de R son un sistema generador del espacio filas de A. Entonces, rf(A) <= r, que definimos como el rango por columnas.
    - Hemos demostrado que el rf(A)<=rc(A). Aplicando el mismo proceso, podemos demostrar que rf(At) <=rc(At), es decir, rc(A)<=rf(A).
    - Entonces, **rc(A) = rf(A)**
  + Ejemplo de la demostración:
    - Sea A= . Dado que la C3 no es lin.indep., el sistema de generadores de las columnas no la necesita. rc(A)=2.
    - Entonces, r= . Para formar la primera columna de A, multiplicamos la primera columna de r por 1 y la segunda por 0. Repetimos este proceso para hallar la matriz k.
    - k= . Comprobamos que las filas de A son todas combinación lineal de las filas de k y por lo tanto, las filas de k generan las de A. Esto significa que dim(FA) = rf(A) <= rf(k) = rc(A) = 2
* También es posible calcular el rango de una matriz por sus **menores**.
  + Un menor de una matriz es el determinante de una submatriz cuadrada de orden p.
  + El rango de una matriz es igual a la orden de su menor no nulo de máxima orden.
  + Para encontrarlo, empezamos por un menor de orden 1 (trivial si la matriz no es nula) y vamos comprobando los menores de orden p+1.
    - Si existe alguno no nulo, continuamos aumentando p.
    - Si todos son nulos, el rango de la matriz será p.
  + El determinante de una matriz es nulo si y solo si una de sus filas **o** columnas es linealmente dependiente de otra. Entonces, por definición, el rango por columnas debe ser igual al rango por filas.
* Se cumple que un conjunto de vectores se puede representar como un sistema de (r-n) ecuaciones, siendo r el rango de la matriz correspondiente.

1. Estructura algebraica en la cual existen las operaciones de adición y multiplicación, y cumplen las propiedades asociativa, distributiva y conmutativa [↑](#footnote-ref-0)
2. Los **generadores** son los vectores, cuyas combinaciones lineales forman todo el conjunto. [↑](#footnote-ref-1)
3. S\vr := S sin el vector vr [↑](#footnote-ref-2)
4. Es decir, de cumplirse una, se cumplen todas. [↑](#footnote-ref-3)